Pár poznámek k neurčitému integrálu

RNDr. Petra Šarmanová, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB–TU Ostrava

Předem bych chtěla poděkovat milým kolegům a autorům učebního textu Integrální počet funkcí jedné proměnné RNDr. Šárce Hoškové Ph.D. a doc. RNDr. Jaromíru Kubenovi CSc. za laskavé svolení využít některé poznámky a obrázky z jejich textu pro účely této přednášky.

Chtěla bych volně navázat na přednášku z loňského Škomamu 2005, která byla věnována především derivaci, vztahu mezi spojitostí a derivací a okrajově se zmiňovala o pojmech určitý a neurčitý integrál. V této přednášce se budeme věnovat podrobněji neurčitému integrálu a zamyslíme se nad tím, jak nám mohou při výpočtu neurčitého integrálu pomoci systémy počítačové algebry jako je Maple nebo Mathematica. Na konkrétních příkladech si ukážeme, jaká úskalí nás při používání matematického softwaru mohou čekat.

Předem zdůrazňuji, že se v žádném případě nejedná o ucelený výklad (ten by nebyl vzhledem k časové dotaci přednášek ani možný), pouze o diskusi několika otázek.

Kapitola 1

Připomenutí pojmu derivace

Derivací získáváme „rychlost změny“ nějaké měnící se veličiny. Hodnota, poloha nebo směr pohybu musí být popsány nějakou funkcí (analytickým výrazem, vzorcem). Derivováním této funkce vzniká nová funkce, která již udává hledanou „rychlost změny“. Stručně řečeno, derivování transformuje jednu funkci na druhou.

Odvození definice derivace na základě mechanického a geometrického modelu byla věnována loňská přednáška[1]. Nyní tedy jen stručně připomeneme definice derivace funkce v bodě a derivace funkce na množině.

Definice 1.1. Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme *derivací funkce f v bodě x_0*.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f *má v bodě x_0 vlastní derivaci.*
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že *funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci.*

Úmluva: Nebude-li dále řečeno jinak, budeme pod pojmem *derivace* rozumět *vlastní derivaci.*

Ještě připomeňme vztah mezi derivací funkce v bodě a spojitostí v tomto bodě.

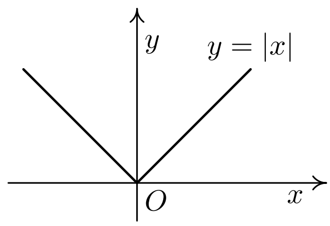
Věta 1.2. *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

[1] Text přednášky je k dispozici na adrese
http://www.am.vsb.cz/SKOMAM05/Prednasky/Sarmanova/par_poznamek.pdf

Opačná implikace však neplatí. Ze spojitosti funkce v bodě neplyne existence derivace v tomto bodě. Triviálním příkladem spojité funkce, která nemá v bodě $x_0 = 0$ derivaci, je funkce absolutní hodnota $f\colon\ y = |x|$. Připomeňme definici této funkce.

$$f\colon y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqq 0. \end{cases}$$

Graf:



Obecně, v bodech, kde má graf funkce „hroty“, nemá funkce derivaci.

Předchozí definice vymezuje pojem derivaci funkce v bodě x_0. Tato derivace je nějaké číslo. Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice 1.3. Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f'\colon\ y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme *derivací funkce f na M.*

Ještě jednou připomeňme, že derivace přiřazuje funkci f novou funkci f'. Pro konkrétní hodnotu x může mít číslo $f'(x)$ různou interpretaci podle toho, co vyjadřuje funkce f. Například:

- geometricky má hodnota $f'(x)$ význam směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x, f(x)]$,
- jestliže f vyjadřuje polohu (dráhu) bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžitou rychlost tohoto bodu v čase x,
- jestliže f vyjadřuje okamžitou rychlost bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžité zrychlení tohoto bodu v čase x.

Obecně, hodnota $f'(x)$ vyjadřuje míru velikosti změny funkce f v závislosti na změně nezávislé proměnné x.

Kapitola 2

Neurčitý integrál

Zabývejme se nyní úlohou, která je v jistém smyslu inverzní k derivování. K zadané funkci f hledáme funkci F takovou, aby platilo $F' = f$. Ptáme se tedy, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f. Tj.

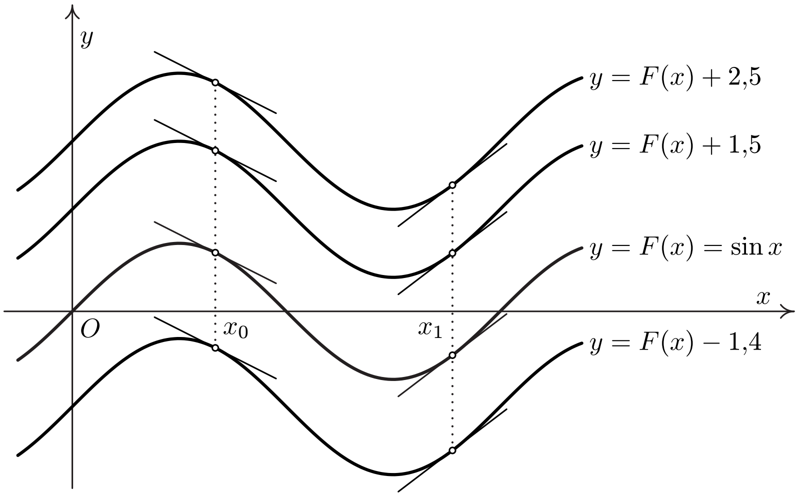
- Ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce f chceme najít tuto funkci f.
- Ze znalosti okamžité rychlosti bodu chceme zjistit polohu tohoto bodu.
- Ze znalosti okamžitého zrychlení bodu chceme určit jeho okamžitou rychlost.

Definice 2.1. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu (a, b) $(a,\ b \in \mathbb{R}^\star,\ a < b)$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, nazýváme *primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b)*.

Chceme např. najít nějakou primitivní funkci k funkci $f\colon\ y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také např. $F(x) = \sin x + 5$ je primitivní funkcí, protože $(\sin x + 5)' = \cos x$. Obecně $F(x) = \sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f.

Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou posunuty ve směru osy y. Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro lib. $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tj. mají stejné směrnice.

Věta 2.2. *Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu (a, b), tvoří funkce definované předpisy $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, právě všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b).*



Obr. 2.1: Primitivní funkce k funkci $\cos x$

K dané funkci f tedy existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se navzájem „liší o konstantu“, tj. je-li F primitivní funkce k f, pak množina všech primitivních funkcí k f je množina $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$. Jinými slovy, jsou-li funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi k funkci f na intervalu (a, b), potom je jejich rozdíl $F_1 - F_2$ konstantní funkce.

Označení: Je-li F primitivní funkcí k funkci f, píšeme

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

a mluvíme o *neurčitém integrálu* funkce f.

Toto označení vychází z historických důvodů – znamení $\int$ vzniklo modifikací velkého „S“.

Při výpočtech však vzniká problém, kterou z primitivních funkcí takto označíme. Není dost dobře možné vybrat z množiny primitivních funkcí nějakého „vhodného reprezentanta“. Domluvme se tedy, že symbol $\int f(x)dx$ značí některou z primitivních funkcí k funkci f (každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty). Stává se tedy, že použijeme-li při výpočtu konkrétního neurčitého integrálu různé metody, dostáváme různé výsledky (různé primitivní fukce). Tyto výsledky se však musí lišit o konstantu.

Ještě poznamenejme, že mluvíme-li o primitivní funkci, máme vždy na mysli i nějaký otevřený interval, na němž je tato funkce definována.

Věta 2.3. *Je-li f spojitá na intervalu (a, b), pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f.*

Dále si uvědomme, že každá primitivní funkce je spojitá. To plyne přímo z definice primitivní funkce: F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F má vlastní derivaci všude na (a, b) a je proto podle věty 1.2 na tomto intervalu spojitá.

Seznámili jsme se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál. Nyní bychom se měli naučit integrovat elementární funkce, tj. seznámit se s integračními metodami (metoda per partes, substituční metoda, integrace racionálních lomených funkcí, integrace některých speciálních typů funkcí obsahujících siny, kosiny, odmocniny...).

Otázka, kterou si často kladou žáci i učitelé je, jestli je v dnešní době počítačů opravdu nutné se učit počítat integrály ručně. Mým cílem není odpovědět na tuto otázku. Chtěla bych pouze na několika příkladech ukázat, že matematické programy mohou na jedné straně velmi usnadnit práci, ale výsledky, které nám dávají je nutno umět správně interpretovat a kriticky hodnotit.

Příklad 1

Chceme-li např. po Maplu, aby nám vypočítal integrál

$$\int 2\,x\,(x^2+1)^{24}\,dx,$$

dostaneme následující výsledek

$$\begin{aligned}&x^2 + \frac{1}{25}\,x^{50} + x^{48} + 12\,x^{46} + 92\,x^{44} + 506\,x^{42} + \frac{10626}{5}\,x^{40} + 7084\,x^{38} + 19228\,x^{36}\\ &\quad + 43263\,x^{34} + 81719\,x^{32} + \frac{653752}{5}\,x^{30} + 178296\,x^{28} + 208012\,x^{26} + 208012\,x^{24}\\ &\quad + 178296\,x^{22} + \frac{653752}{5}\,x^{20} + 81719\,x^{18} + 43263\,x^{16} + 19228\,x^{14} + 7084\,x^{12} + \frac{10626}{5}\,x^{10}\\ &\quad + 506\,x^8 + 92\,x^6 + 12\,x^4\end{aligned}$$

Nepomůže ani zjednodušení, tj. užití příkazu "factor":

$$\begin{aligned}&\frac{1}{25}x^2\,(x^8 + 5\,x^6 + 10\,x^4 + 10\,x^2 + 5)(x^{40} + 20\,x^{38} + 190\,x^{36} + 1140\,x^{34} + 4845\,x^{32}\\ &\quad + 15505\,x^{30} + 38775\,x^{28} + 77625\,x^{26} + 126425\,x^{24} + 169325\,x^{22} + 187760\,x^{20}\\ &\quad + 172975\,x^{18} + 132450\,x^{16} + 84075\,x^{14} + 43975\,x^{12} + 18760\,x^{10} + 6425\,x^8 + 1725\,x^6\\ &\quad + 350\,x^4 + 50\,x^2 + 5)\end{aligned}$$

Kdybychom zadaný integrál vypočítali „ručně“ (výpočet je velmi jednoduchý), dostali bychom následující výsledek

$$\frac{1}{25}\,(x^2+1)^{25}.$$

Jsou správné oba výsledky? Zkusíme-li od našeho výsledku odečíst výsledek, který nám předložil Maple, dostaneme konstantu rovnu číslu 1/25. Z toho tedy plyne, že oba výsledky představují různé primitivní funkce k zadané funkci.

Příklad 2

Chceme-li pomocí Maplu vypočítat integrál

$$\int (\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-4})dx,$$

dostaneme následující výsledek

$$\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\,\arcsin(x)+\frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2-4}-2\ln(x+\sqrt{x^2-4})$$

Je správný? Odpověď zní NE. Definiční obor této funkce je prázdný, tedy výsledek je nesmyslný.

Příklad 3

Chceme-li vypočítat integrál

$$\int \sin x^2 dx,$$

dostaneme následující výsledek

$$\frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\mathrm{FresnelS}(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}})$$

Jak si poradíme s takovým výsledkem? Proč není výsledek vyjádřen pomocí nám známých elementárních funkcí?

Dostáváme se k otázce zdali integrací elementární funkce dostaneme vždy opět elementární funkci.

Víme, že elementární funkce jsou spojité na intervalech, na nichž jsou definované. Proto k nim podle věty 2.3 existují primitivní funkce. ALE tyto primitivní funkce již nemusí být elementární.

Takové funkce (primitivní funkce k elementárním funkcím, které již nejsou elementární) se obvykle nazývají *vyšší transcendentní funkce.*

Bohužel neexistuje žádné kritérium jak rozhodnout, jestli konkrétní neurčitý integrál vede na elementární funkci nebo na vyšší transcendentní funkci. V praxi se nám buď podaří konkrétní integrál spočítat (tj. nalézt primitivní funkci v množině elementárních funkcí) nebo ne. V případě neúspěchu ale nevíme, zda je to dáno naší nedostatečnou zkušeností, a tudíž má cenu se snažit dále, nebo zda to opravdu nejde a tudíž nemá cenu ztrácet s daným integrálem čas.

Příklady integrálů, o nichž je známo, že vedou na vyšší transc. funkci jsou:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{integrálsinus} \qquad \int \frac{\cos x}{x} dx \quad \text{integrálkosinus}$$

$$\int \frac{1}{\ln x} dx \quad \text{logaritmusintegrál} \qquad \int \mathrm{e}^{-x^2} dx \quad \text{Gaussova funkce}$$

$$\int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx \quad \text{Fresnelovy integrály}$$

Vidíme, že se jedná na první pohled o velmi jednoduché funkce. Tedy odhadnout podle „složitosti“ zadané funkce, zda je její primitivní funkce elementární nebo ne, je nemožné. Například $\int \cos^2 x dx$ lehce spočítáme, ale $\int \cos x^2 dx$, už není elementární funkce. Přitom v obou případech jde o složenou funkci se složkami „druhá mocnina“ a „kosinus“. Liší se jen pořadím složek.

Příklad 4

Chceme-li spočítat integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2 - \cos x},$$

dostaneme výsledek

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right).$$

Může být uvedená funkce primitivní funkcí k zadané funkci $f\colon\ y = \frac{1}{2-\cos x}$?

Podívejme se nejprve na funkci f:

Funkce f je definována a tudíž spojitá na celém $\mathbb{R}$. Dle věty 2.3 tedy existuje na celém $\mathbb{R}$ primitivní funkce k f. Vzhledem k tomu, že je každá primitivní funkce spojitá, musí tedy k naší funkci f existovat na celém $\mathbb{R}$ spojitá primitivní funkce.

Nyní se podívejme na výslednou funkci, kterou si pracovně označme G:

$$G(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Funkce G je definována pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{\dots, -3\pi, -\pi, \pi, 3\pi, \dots\}$. Jedná se tedy o nespojitou funkci. Jako taková tedy nemůže být primitivní funkcí k funkci f.

Zamysleme se nad tím, jak vypadají primitivní funkce na jednotlivých intervalech $\big((2k-1)\pi, (2k+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$, na nichž je funkce G spojitá.

- Pro každé $x \in (-\pi, \pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

Funkce f i funkce G jsou periodické s periodou 2π. Stačí se tedy zabývat těmito funkcemi na intervalu délky 2π, tj. např. na intervalu $(-\pi, \pi)$. Grafy těchto funkcí na dalších intervalech jsou kopií části grafu z intervalu $(-\pi, \pi)$. Tedy

- Pro každé $x \in (-3\pi, -\pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.
- Pro každé $x \in (\pi, 3\pi)$ platí $G'(x) = f(x)$. Na tomto intervalu jsou tedy všechny primitivní funkce tvaru $G(x) + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$.

Atd. Utvořme nyní z těchto primitivních funkcí na jednotlivých intervalech funkci F, která bude primitivní k f na celém $\mathbb{R}$. Především nám jde o to, aby byla funkce F spojitá na $\mathbb{R}$. Zvolme tedy konstanty c_0, c_1, c_2, …tak, aby primitivní funkce na jednotlivých intervalech na sebe navazovaly.

- Vyjděme od intervalu $(-\pi, \pi)$ a položme $F(x) = G(x)$ pro každé $x \in (-\pi, \pi)$. (Zvolili jsme $c_0 = 0$).
- Podívejme se nyní na limitu funkce F v pravém krajním bodě tohoto intervalu – to je bod, v němž budeme muset kvůli spojitosti dodefinovat hodnotu. Tato limita nám také pomůže zjistit konstantu c_2 (kterou z primitivních funkcí na intervalu $(\pi, 3\pi)$ vybrat, aby „spojitě navazovala“ na funkci F na intervalu $(-\pi, \pi)$.

$$\lim_{x \to \pi^-} F(x) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{x\to\pi^+} G(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Vidíme, že je třeba zvolit $c_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Posouváme tedy funkci $G(x)$ na intervalu $(\pi, 3\pi)$ o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nahoru.

- Prozatím tedy máme spojitou primitivní funkci na intervalu $(-\pi, 3\pi)$:

$$F(x) = \begin{cases} \vdots & \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (\pi, 3\pi), \\ \vdots & \end{cases} \tag{2.1}$$

- Obdobně se podíváme na limitu v bodě $x = -\pi$.

$$\lim_{x\to-\pi^+} F(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

$$\lim_{x\to-\pi^-} G(x) = \lim_{x\to-\pi^+} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

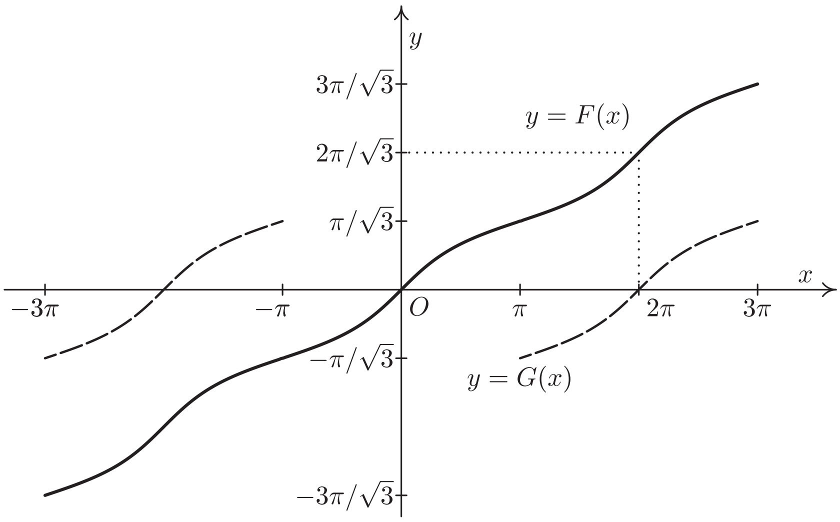
Vidíme, že je třeba zvolit $c_1 = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Posouváme tedy funkci $G(x)$ na intervalu $(-3\pi, -\pi)$ o $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ dolů.

- Máme spojitou primitivní funkci na intervalu $(-3\pi, 3\pi)$:

$$F(x) = \begin{cases} \vdots & \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (-3\pi, -\pi), \\ -\frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = -\pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} & \text{pro } x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x = \pi, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{2\pi}{\sqrt{3}} & \text{pro } x \in (\pi, 3\pi), \\ \vdots & \end{cases} \tag{2.2}$$

Obdobně bychom konstruovali funkci F na všech intervalech $\big((2k-1)\pi, (2k+$ $+1)\pi\big)$, $k \in \mathbb{Z}$. Takto zkonstruovaná funkce bude mít všude derivaci a bude primitivní k funkci $\frac{1}{2-\cos x}$. Všimněte si, že funkce F není periodická – viz obr. 2.2. Funkce $G(x)$, která není definovaná v lichých násobcích π a je 2π-periodická, je znázorněna čárkovaně. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ grafy $F(x)$ a $G(x)$ splývají.

S podobnou situací (jakýmsi „slepováním“ grafů) se u integrálů obsahujících goniometrické funkce setkáváme velmi často. Bohužel s příklady tohoto typu si programy Maple nebo Mathematica neumějí vyrovnat. Pokud potřebujeme primitivní funkci na větším intervalu, musíme být velmi opatrní. Jinak můžeme dostat velmi snadno zcela nesmyslné výsledky (např. při výpočtu určitého integrálu pomocí neurčitého.



Obr. 2.2: Graf primitivní funkce k funkci $\frac{1}{2-\cos x}$

Pro zajímavost uveďme i výpočet neurčitého integrálu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x}$.

Řešení. Použijeme substituci $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Pomocí této substituce můžeme daný integrál vypočítat na každém z intervalů $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-\cos x} = \left| \begin{array}{r} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{2 - \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{2}{3t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + c =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\,t + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Nalezená funkce je primitivní funkcí k funkci $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$ na každém intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokud chceme nalézt primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$, musíme postupovat metodou „slepování“, jak již bylo naznačeno výše. ▲

Poznámka 2.4. Výhodou substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ je její univerzálnost, uvažovaný integrál převede vždy na integrál z racionální funkce. Má však dvě velké nevýhody. První z nich spočívá v tom, že konkrétní výpočty pomocí této substituce bývají většinou dost pracné, a druhá nevýhoda je, že k nalezení integrálu na maximálních intervalech, na nichž je integrovaná funkce spojitá, musíme často provádět „slepování“ – viz předchozí příklad. Proto, můžeme-li se této obecné substituci vyhnout, raději tak učiníme.

Co říci závěrem? K tomu, abychom mohli efektivně využívat systémy počítačové algebry k výpočtu integrálů, je třeba znát přesné definice pojmů, vlastnosti těchto pojmů a všímat si intervalů, na nichž jsou zadaná a výsledná funkce definovány. Obecně není dobré tyto programy přeceňovat a plně se na ně spoléhat. Je důležité umět kriticky zhodnotit, zda výsledek, který nám počítače vyrobí, může být správný.

Literatura

[1] Bouchala, J.: *Matematická analýza 1.* VŠB-TU, Ostrava, 1998.

[2] Hošková, Š., Kuben, J.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné.* Vojenská akademie, Brno, 2004.

[3] Kuben, J., Šarmanová, P. Šimonová, J. : *Matematická analýza I pro kombinované a distanční studium.* Skriptum na CD. Ostrava, 2004.

[4] Schwabik Š., Šarmanová, P. : *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha, 1996.