Rekurentní rovnice

V této přednášce se budeme zabývat hledáním posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, které splňují pro každé přirozené číslo $n > k$ rekurentní vztah

$$x_n = a_{k-1}x_{n-1} + a_{k-2}x_{n-2} + \cdots + a_1 x_{n-k+1} + a_0 x_{n-k}, \tag{1}$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ a $a_0 \neq 0$. V takovém případě mluvíme o tzv. homogenní lineární rekurentní rovnici k–tého řádu s konstantními koeficienty. Klasickým příkladem je rekurentní rovnice

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},$$

která společně s počátečními podmínkami $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ popisuje tzv. Fibonacciho posloupnost. Pro lepší představu jde o posloupnost

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots).$$

Naším cílem bude naučit se z rekurentních vztahů odvodit explicitní vyjádření pro n–tý člen zadané posloupnosti.

Řešení rekurentních rovnic:

Uvažujme rovnici (1). K této rovnici napišme tzv. charakteristickou rovnici. Tato rovnice má tvar

$$t^k = a_{k-1}t^{k-1} + a_{k-2}t^{k-2} + \cdots + a_1 t + a_0. \tag{2}$$

Nyní předpokládejme, že již známe řešení rovnice (2). Každému řešení rovnice (2) totiž určitým způsobem odpovídá nějaké řešení rovnice (1). Přesněji platí následující.

- Je-li t_0 jednonásobným reálným kořenem rovnice (2), pak posloupnost $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$ je řešením rovnice (1).
- Je-li t_0 p–násobným reálným kořenem rovnice (2), pak rovnici (1) vyhovují posloupnosti $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{nt_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$, ..., $\{n^{p-1}t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$.
- Je-li t_0 jednonásobným nereálným (komplexním) kořenem rovnice (2), pak je jím automaticky i číslo komplexně sdružené. Číslo t_0 je třeba vyjádřit v goniometrickém tvaru, tj. $t_0 = |t_0|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Dvojici komplexně sdružených kořenů t_0 a $\overline{t_0}$ pak odpovídají posloupnosti $\{|t_0|^n \cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{|t_0|^n \sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$, které vyhovují rovnici (1).
- Je-li t_0 p–násobným komplexním kořenem rovnice (2), pak rovnici (1) vyhovují posloupnosti $\{|t_0|^n \cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{|t_0|^n \sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{n|t_0|^n \cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{n|t_0|^n \sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$, ..., $\{n^{p-1}|t_0|^n \cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{n^{p-1}|t_0|^n \sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$.

Sestrojme nyní podle předchozího algoritmu ke každému kořenu charakteristické rovnice (2) příslušnou posloupnost. Obecné řešení rekurentní rovnice (1) se pak dostane jako množina všech lineárních kombinací těchto posloupností.

Příklad 1. *Najděte řešení rekurentní rovnice $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ splňující počáteční podmínky $x_1 = 2, x_2 = 3$.*

Řešení. Nejprve řešíme charakteristickou rovnici, tj. rovnici $t^2 = 5t - 6$. Tato rovnice má dva různé reálné kořeny

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 3.$$

Podle předchozího těmto kořenům odpovídají posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{3^n\}_{n=1}^{+\infty}$. Obecné řešení dané rekurentní rovnice je tedy

$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

Z počátečních podmínek obdržíme (zpětným dosazením do vztahu pro obecné řešení) soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 &= 2 \\ 4c_1 + 9c_2 &= 3. \end{aligned}$$

Po vyřešení dostáváme $c_1 = \frac{3}{2}$ a $c_2 = -\frac{1}{3}$ a tedy explicitní vyjádření n–tého členu naší posloupnosti bude

$$x_n = \frac{3}{2} 2^n - \frac{1}{3} 3^n,$$

tj.

$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1}.$$

□

Příklad 2. *Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah $x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2}$ a počáteční podmínky $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$.*

Řešení. Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $t_{1,2} = 2$. Obecné řešení rekurentní rovnice je tedy tvaru

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$

Z počátečních podmínek vyplývá, že

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 &= 1 \\ 4c_1 + 8c_2 &= 4, \end{aligned}$$

odkud dostaneme $c_1 = 0$ a $c_2 = \frac{1}{2}$. Celkem tedy

$$x_n = n 2^{n-1}.$$

□

Příklad 3. *Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah $x_n = 2x_{n-1} - 2x_{n-2}$ a počáteční podmínky $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$.*

Řešení. Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $t_1 = 1 + i$, $t_2 = 1 - i$. Snadno se přesvědčíme, že $t_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$ a tedy obecné řešení rekurentní rovnice je tvaru

$$x_n = c_1 \sqrt{2^n} \cos\frac{n\pi}{4} + c_2 \sqrt{2^n} \sin\frac{n\pi}{4}$$

Z počátečních podmínek vyplývá, že

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 2c_2 &= 4, \end{aligned}$$

odkud dostaneme $c_1 = -1$ a $c_2 = 2$. Celkem tedy máme

$$x_n = \sqrt{2^n}\left(2\sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

$\square$

Příklad 4. *Kolika způsoby lze beze zbytku pokrýt šachovnici o rozměru* $2\times n$ *kostkami o rozměru* 2×1.

Řešení. Označme hledaný počet možností x_n, kde n je druhý rozměr naší šachovnice. Není těžké ověřit, že $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Jednoduchou kombinatorickou úvahou zjistíme, že $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Jedná se vlastně o Fibonacciho posloupnost s tím rozdílem, že nyní máme jiné počáteční podmínky. Řešení vzniklé rekurentní rovnice je tvaru

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

$\square$

Příklad 5. *Ukažte, že pro libovolné přirozené číslo* n *je číslo*

$$A_n = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

celé.

Řešení. Přímým výpočtem zjistíme, že $A_1 = 3$ a $A_2 = 11$. Protože čísla $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ a $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ jsou řešením kvadratické rovnice $x^2 = 3x+1$, platí jistě rekurentní vztah $A_n = 3A_{n-1} + A_{n-2}$. Odtud již plyne požadovaná vlastnost čísel A_n. $\square$